Pendulum Search Algorithm

Dr. Broderick Crawford Labrín

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Pendulum Search Algorithm (GOA)

- Fue desarrollada por Shu-Chuan Chu et. al. en el año 2022 [a].
- Es una metaheurística basado en población diseñada para resolver problemas de optimización continuos.
- Sus soluciones (individuos) iniciales se generan aleatoreamente y se van alterando bajo un conjunto de reglas de movimiento con criterios estocásticos.

---

[a] *Gannet optimization algorithm : A new metaheuristic algorithm for solving engineering optimization problems*, Algorithms (2022)

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,j} & \cdots & x_{1,Dim} \\ x_{2,1} & x_{2,j} & \cdots & x_{2,Dim} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{N,1} & x_{N,j} & \cdots & x_{N,Dim} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$x_{i,j} = r_1 \times (UB_j - LB_j) + LB, i = 1, 2, ..., N, j = 1, 2, ..., Dim \quad (2)$$

- Donde:
  - X son soluciones aleatorias con la que empieza el algoritmo
  - $x_{i,j}$ el como se calculan las soluciones presenten en X
    - $UB_j y LB_j$ son el upper y lower bound de la j^{th} posición
    - N es el número total de individuos en la población
    - r_1 es un número aleatorio entre $[0, 1]$

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento (Exploración)

$$t = 1 \frac{iter}{MaxIt} \tag{3}$$

$$a = 2 \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot r_2) \cdot t \tag{4}$$

$$b = 2 \cdot V(2 \cdot \pi \cdot r_3) \cdot t \tag{5}$$

$$V(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} \cdot x + 1, x \in (0, \pi) \\ \frac{1}{\pi} \cdot x - 1, x \in (\pi, 2\pi) \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Donde:
  - *iter* iteración actual
  - *MaxIt* maximo de iteraciones
  - r_2 es un número aleatorio entre $[0, 1]$
  - r_3 es un número aleatorio entre $[0, 1]$

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento (Exploración)

$$MX(x) = \begin{Bmatrix} X_i^t + u_1 + u_2, q \geq 0{,}5 \\ X_i^t + v1 + v2, q < 0{,}5 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$u_2 = A \cdot (X_i^t - X_r^t) \tag{8}$$

$$v_2 = B \cdot (X_i^t - X_m^t) \tag{9}$$

- Donde:
  - u_1 es un número aleatorio entre a y -a
  - v_1 es un número aleatorio entre b y -b
  - X_i^t es el i^{th} individuo en la población actual
  - X_r^t es un individuo aleatorio elegido en la población actual

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento (Exploración)

$$A = (2 \cdot r_4 - 1) \cdot a \tag{10}$$

$$B = (2 \cdot r_5 - 1) \cdot b \tag{11}$$

$$X_m^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i^t \tag{12}$$

- Donde:
  - r_4 y r_5 son números aleatorio entre $[0, 1]$
  - X_m^t denota la posición promedio de los individuos en la población actual

- Ecuaciones de movimiento (Explotación)

$$capturability = \frac{1}{R \cdot t2} \tag{13}$$

$$t2 = 1 + \frac{iter}{MaxIt} \tag{14}$$

$$R = \frac{M \cdot vel^2}{L} \tag{15}$$

$$L = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot r_6 \tag{16}$$

- Donde:
  - *capturability* es la capacidad de captura
  - r_6 es un número aleatorio entre $[0, 1]$
  - $M = 2{,}5kg$ siendo el peso del gannet
  - $vel = 1{,}5m/s$ es la velocidad del gannet en el agua

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento (Explotación)

$$MX(x) = \begin{Bmatrix} t \cdot \delta \cdot (X_i^t - best^t) + X_i^t, capturability \geq c \\ best^t - (X_i^t - best^t) \cdot P \cdot t, capturability < c \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\delta = capturability \cdot |X_i^t - best^t| \quad (18)$$

$$P = levy(Dim) \quad (19)$$

- Donde:
  - $MX(x)$ se utiliza en el caso de que el gannet no atrape al pez y busca a la siguiente preza de forma aleatoria
    - $c = 0{,}2$ es una constante
  - $best^t$ es el individuo con el mejor desempeño en la población actual

GOA: Ecuaciones de movimiento

- Ecuaciones de movimiento (Explotación)

$$levy(Dim) = 0{,}01x\frac{\mu \cdot \sigma}{|v|^{\frac{1}{\beta}}} \tag{20}$$

$$\sigma = \left(\frac{\Gamma(1+\beta) \cdot sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \cdot \beta x 2^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}} \right) \tag{21}$$

- Donde:
  - *levy* es la funcion de vuelo de levy
    - σ y μ son números aleatorios entre $[0, 1]$
    - $\beta = 1{,}5$ siendo una constante predeterminada

GOA: Pseudocódigo

Algorithm 1 Gannet optimization algorithm

```
Input: Population X={ x_1, x_2, ..., x_N }
Output: Updated population X'={x'_1, x'_2, ..., x'_N } and best
Initialize random gannet population X, memory matrix MX, constant M, constant VEL and constant C
for it = 1 to MaxIt do
    calulate the fitness of each X
    select best
    t = 1 - (it / maxIter)
    X_r = X[randint(0,N-1)]
    for j=0 to dim do
        X_m.append(average(X[:,j]))
    r = random()
    if r ≥ 0.5
        for i=0 to N do
            q = random()
            if q ≥ 0.5
                for j=0 to dim do
                    r2 = random()
                    r4 = random()
                    a = 2 * cos(2*π*r2) * t
                    A = (2 * r4 - 1) * a
                    u1 = random(-a,a)
                    u2 = A * (X[i,j] - X_r[j])
                    MX[i,j] = X[i,j] + u1 + u2
            else
                for j=0 to dim do
                    r3 = random()
                    r5 = random()
                    x = 2 * pi * r3
                    if x > π
                        vx = ((1 / pi) * x - 1)
```

GOA: Pseudocódigo

```
                                    else
                                            vx = (-(1 / pi) * x + 1)
                                    b = 2 * vx * t
                                    B = (2 * r5 - 1) * b
                                    v1 = random(-b, b)
                                    v2 = B * (X[i,j] - Xm[j])
                                    MX[i,j] = X[i,j] + v1 + v2
            else
                    t2 = 1 + (it / maxIter)
                    for i=0 to N do
                            r6 = random()
                            l = 0.2 + (2 - 0.2) * r6
                            R = (M * VEL**2) / l
                            capturability = 1 / (R * t2)
                            if capturability ≥ C
                                    for j=0 to dim do
                                            δ = capturability * |X[i, j] − best[j]|
                                            MX[i,j] = t * δ  * (X[i,j] - best[j]) + X[i,j]
                            else
                                    for j=0 to dim do
                                            σ = ((Γ(1 + beta) ∗ sin(π ∗ β/2)) / (Γ((1 + β)/2) ∗ β ∗ 2^((β − 1)/2)))^(1/β)
                                            p = levy() = 0.01 * ((μ  ∗ σ) / (|v|^(1/β)))
                                            MX[i,j] = best[j]-(X[i,j]-best[j])*p*t
            for MX
                    calculate fitness for MX
                    if the value of MX_i is better than the value X_i, replace X_i with MX_i
    return updated population X' and best
```

GOA: Ejemplo prático - parámetros iniciales

Considerando

$$\text{Min } z = x_1^2 + x_2^2$$

Sujeto a

$$x_1, x_2 \in [-100, 100]$$

Configuración inicial de GOA:

- Tamaño de la población: 2 individuos
- Número máximo de iteraciones: 500 iteraciones
- Constantes:
  - m = 2.5
  - vel = 1.5
  - c = 0.2
  - $\beta = 1.5$

GOA: Ejemplo prático - soluciones inciales

Soluciones inciales:
ind 1: [74.3772, 44.5327] / fitness: 7515.1284
ind 2: [29.2269, 31.7354] / fitness: 1861.3477

Mejor solución:
ind 2: [29.2269, 31.7354] / fitness: 1861.3477

GOA: Ejemplo prático - iter 1

Ecuación general GOA:

$$MX(x) = X = \begin{bmatrix} 74{,}3772 & 44{,}5327 \\ 29{,}2269 & 31{,}7354 \end{bmatrix}$$
$$t = 1 - \frac{iter}{MaxIt} = 1 - \frac{1}{500} = 0{,}9980$$
$$t2 = 1 + \frac{iter}{MaxIt} = 1 + \frac{1}{500} = 1{,}0020$$
$$randomIndex = randint(0, N-1) = 0$$

$$X_r^t = X[randomIndex] = [74{,}3772, 44{,}5327]$$
$$X_m^t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^t = [51{,}8021, 38{,}134]$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}0025$$
$$r \leq 0{,}5 \rightarrow 0{,}0025 \leq 0{,}5$$
$$r_6 = random() = 0{,}4360$$

$$L = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot r_6 = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot 0{,}4360 = 0{,}9848$$
$$R = \frac{M \cdot vel^2}{L} = \frac{2{,}5000 \cdot 1{,}5000^2}{0{,}9848} = 5{,}7117$$
$$capturability = \frac{1}{5{,}7117 \cdot 1{,}0020} = 0{,}1747$$
$$capturability < c \rightarrow 0{,}1747 < 0{,}2$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - dim 1 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$\mu = random() = 0{,}3363$$
$$v = random() = 0{,}4238$$

$$\sigma = \left(\frac{\Gamma(1+1{,}5) x sin\left(\frac{\pi 1{,}5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+1{,}5}{2}\right) x 1{,}5 x 2^{\left(\frac{1{,}5-1}{2}\right)}} \right) = 0{,}6966$$

$$P = levy(Dim) = 0{,}01 \cdot \frac{0{,}3363 \cdot 0{,}6966}{|0{,}4238|^{\frac{1}{1{,}5}}} = 0{,}0042$$
$$MX_{1,1} = 29{,}2269 - (74{,}3772 - 29{,}2269) \cdot 0{,}0042 \cdot 0{,}9980 = 29{,}0399$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - dim 2 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$\mu = random() = 0{,}5623$$
$$v = random() = 0{,}8867$$

$$\sigma = \left(\frac{\Gamma(1+1{,}5) \cdot sin\left(\frac{\pi 1{,}5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+1{,}5}{2}\right) \cdot 1{,}5x2^{\left(\frac{1{,}5-1}{2}\right)}} \right) = 0{,}6966$$

$$P = levy(Dim) = 0{,}01 \cdot \frac{0{,}5623 \cdot 0{,}6966}{|0{,}8867|^{\frac{1}{1{,}5}}} = 0{,}0042$$
$$MX_{1,2} = 31{,}7354 - (44{,}5327 - 31{,}7354) \cdot 0{,}0042 \cdot 0{,}9980 = 31{,}6812$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$X_1 = [74{,}3772, 44{,}5327] \rightarrow f_{X_1} = 7515{,}1284$$
$$MX_1 = [29{,}0399, 31{,}6812] \rightarrow f_{MX_1} = 1847{,}0103$$
$$f_{MX_1} < f_{X_1}$$
$$1847{,}0103 < 7515{,}1284 \rightarrow X_1 = MX_1$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}0902$$
$$r \leq 0{,}5 \rightarrow 0{,}0902 \leq 0{,}5$$
$$r_6 = random() = 0{,}8752$$

$$L = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot r_6 = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot 0{,}8752 = 1{,}7754$$
$$R = \frac{M \cdot vel^2}{L} = \frac{2{,}5000 \cdot 1{,}5000^2}{1{,}7754} = 3{,}1683$$
$$capturability = \frac{1}{3{,}1683 \cdot 1{,}0020} = 0{,}3150$$
$$capturability \geq c \rightarrow 0{,}3150 \geq 0{,}2$$

GOA: Ejemplo prático - ind - 2 dim 1 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$\delta = 0{,}3150 \cdot |29{,}2269 - 29{,}2269| = 0{,}0000$$
$$MX_{2,1} = 0{,}9980 \cdot 0{,}0000 \cdot (29{,}2269 - 29{,}2269) + 29{,}2269 = 29{,}2269$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - dim 2 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$\delta = 0{,}3150 \cdot |31{,}7354 - 31{,}7354| = 0{,}0000$$
$$MX_{2,2} = 0{,}9980 \cdot 0{,}0000 \cdot (31{,}7354 - 31{,}7354) + 31{,}7354 = 31{,}7354$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - iter 1

Ecuación general GOA:

$$X_2 = [29{,}2269, 31{,}7354] \rightarrow f_{X_2} = 1861{,}3477$$
$$MX_2 = [29{,}2269, 31{,}7354] \rightarrow f_{MX_2} = 1861{,}3477$$
$$f_{MX_1} \geq f_{X_1}$$
$$1847{,}0103 \geq 7515{,}1284 \rightarrow X_2 \text{ se mantiene}$$

GOA: Ejemplo prático - validación restricciones

Restricción: $x_1, x_2 \in [-100, 100]$

Soliciones obtenidas en la iteración 1:
ind 1: [29.0399, 31.6812], infactibles: 0
ind 2: [29.2269, 31.7354], infactibles: 0

Reparación de soluciones:
ind 1: [29.0399, 31.6812] / fitness: 1847.0103
ind 2: [29.2269, 31.7354] / fitness: 1861.3477

Mejor solución:
ind 1: [29.0399, 31.6812] / fitness: 1847.0103

GOA: Ejemplo prático - iter 2

Ecuación general GOA:

$$MX(x) = X = \begin{bmatrix} 29{,}0399 & 31{,}6812 \\ 29{,}2269 & 31{,}7354 \end{bmatrix}$$
$$t = 1 - \frac{iter}{MaxIt} = 1 - \frac{2}{500} = 0{,}9960$$
$$t2 = 1 + \frac{iter}{MaxIt} = 1 + \frac{2}{500} = 1{,}0040$$
$$randomIndex = randint(0, N-1) = 0$$

$$X_r^t = X[randomIndex] = [29{,}0399, 31{,}6812]$$
$$X_m^t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i^t = [29{,}1334, 31{,}7083]$$

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}5624$$
$$r > 0{,}5 \rightarrow 0{,}5624 > 0{,}5$$
$$q = random() = 0{,}0340$$
$$q < 0{,}5 \rightarrow 0{,}0340 < 0{,}5$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - dim 1 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$r_3 = random() = 0{,}4207$$
$$r_5 = random() = 0{,}2298$$

$$V(2 \cdot \pi \cdot r_3) = V(2 \cdot \pi \cdot 0{,}4207) = V(2{,}643485141584701)$$
$$x \leq \pi \rightarrow 2{,}6435 \leq \pi$$
$$V(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot 2{,}6435 + 1 = 0{,}1586$$
$$b = 2 \cdot 0{,}1586 \cdot 0{,}9960 = 0{,}3158$$

$$B = (2 \cdot 0{,}2298 - 1) \cdot 0{,}3158 = -0{,}1707$$
$$v_1 = random(-b, b) = random(-0{,}3158, 0{,}3158) = 0{,}2189$$
$$v_2 = -0{,}1707 \cdot (29{,}0399 - 29{,}1334) = 0{,}0160$$
$$MX_{1,1} = X_i^t + v1 + v2 = 29{,}0399 + 0{,}2189 + 0{,}0160 = 29{,}2747$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - dim 2 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$r_3 = random() = 0{,}7121$$
$$r_5 = random() = 0{,}9318$$

$$V(2 \cdot \pi \cdot r_3) = V(2 \cdot \pi \cdot 0{,}7121) = V(4{,}47451152395702)$$
$$x > \pi \rightarrow 4{,}4745 > \pi$$
$$V(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot 4{,}4745 - 1 = 0{,}4243$$
$$b = 2 \cdot 0{,}4243 \cdot 0{,}9960 = 0{,}8452$$

$$B = (2 \cdot 0{,}9318 - 1) \cdot 0{,}8452 = 0{,}7299$$
$$v_1 = random(-b, b) = random(-0{,}8452, 0{,}8452) = -0{,}5048$$
$$v_2 = 0{,}7299 \cdot (31{,}6812 - 31{,}7083) = -0{,}0198$$
$$MX_{1,1} = X_i^t + v1 + v2 = 31{,}6812 - 0{,}5048 - 0{,}0198 = 31{,}1566$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$X_1 = [29{,}0399, 31{,}6812] \rightarrow f_{X_1} = 1847{,}0103$$
$$MX_1 = [29{,}2747, 31{,}1566] \rightarrow f_{MX_1} = 1827{,}7387$$
$$f_{MX_1} < f_{X_1}$$
$$1827{,}7387 < 1847{,}0103 \rightarrow X_1 = MX_1$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}7705$$
$$r > 0{,}5 \rightarrow 0{,}7705 > 0{,}5$$
$$q = random() = 0{,}9445$$
$$q \geq 0{,}5 \rightarrow 0{,}9445 \geq 0{,}5$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - dim 1 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$r_2 = random() = 0{,}9945$$
$$r_4 = random() = 0{,}6667$$
$$a = 2 \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot 0{,}9945) \cdot 0{,}9960 = 1{,}9908$$
$$A = (2 \cdot 0{,}6667 - 1) \cdot 1{,}9908 = 0{,}6636$$

$$u_1 = random(-a, a) = random(-1{,}9908, 1{,}9908) = 0{,}4578$$
$$u_2 = 0{,}6636 \cdot (29{,}2269 - 29{,}2747) = -0{,}0317$$
$$MX_{2,1} = X_{2,1}^t + u_1 + u_2 = 29{,}2269 + 0{,}4578 - 0{,}0317 = 29{,}6531$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - dim 2 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$r_2 = random() = 0{,}0270$$
$$r_4 = random() = 0{,}7965$$
$$a = 2 \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot 0{,}0270) \cdot 0{,}9960 = 1{,}9634$$
$$A = (2 \cdot 0{,}7965 - 1) \cdot 1{,}9634 = 1{,}1642$$

$$u_1 = random(-a, a) = random(-1{,}9634, 1{,}9634) = -1{,}1308$$
$$u_2 = 1{,}1642 \cdot (31{,}7354 - 31{,}1566) = 0{,}6739$$
$$MX_{2,1} = X^t_{2,1} + u_1 + u_2 = 31{,}7354 - 1{,}1308 + 0{,}6739 = 31{,}2784$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - iter 2

Ecuación general GOA:

$$X_2 = [29{,}2269, 31{,}7354] \rightarrow f_{X_2} = 1861{,}3477$$
$$MX_2 = [29{,}6531, 31{,}2784] \rightarrow f_{MX_2} = 1857{,}6443$$
$$f_{MX_1} < f_{X_1}$$
$$1857{,}6443 < 1861{,}3477 \rightarrow X_2 = MX_2$$

GOA: Ejemplo prático - validación restricciones

Restricción: $x_1, x_2 \in [-100, 100]$

Soliciones obtenidas en la iteración 1:
ind 1: [29.2747, 31.1566], infactibles: 0
ind 2: [29.6531, 31.2784], infactibles: 0

Reparación de soluciones:
ind 1: [29.2747, 31.1566] / fitness: 1827.7387
ind 2: [29.6531, 31.2784] / fitness: 1857.6443

Mejor solución:
ind 1: [29.2747, 31.1566] / fitness: 1827.7387

GOA: Ejemplo prático - iter 500

Ecuación general GOA:

$$MX(x) = X = \begin{bmatrix} -0{,}0024 & 0{,}0026 \\ -0{,}0018 & 0{,}001 \end{bmatrix}$$
$$t = 1 - \frac{iter}{MaxIt} = 1 - \frac{500}{500} = 0{,}0000$$
$$t2 = 1 + \frac{iter}{MaxIt} = 1 + \frac{2}{500} = 2{,}0000$$
$$randomIndex = randint(0, N-1) = 0$$
$$X_r^t = X[randomIndex] = [-0{,}0024, 0{,}0026]$$
$$X_m^t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i^t = [-0{,}0021, 0{,}0018]$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}8373$$
$$r > 0{,}5 \rightarrow 0{,}8373 > 0{,}5$$
$$q = random() = 0{,}3772$$
$$q < 0{,}5 \rightarrow 0{,}3772 < 0{,}5$$

GOA: Ejemplo prático - ind - 1 dim 1 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$r_3 = random() = 0{,}3630$$
$$r_5 = random() = 0{,}4736$$

$$V(2 \cdot \pi \cdot r_3) = V(2 \cdot \pi \cdot 0{,}3630) = V(2{,}280670145193084)$$
$$x \leq \pi \rightarrow 2{,}2807 \leq \pi$$
$$V(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot 2{,}2807 + 1 = 0{,}2740$$
$$b = 2 \cdot 0{,}2740 \cdot 0{,}0000 = 0{,}0000$$

$$B = (2 \cdot 0{,}4736 - 1) \cdot 0{,}0000 = -0{,}0000$$
$$v_1 = random(-b, b) = random(-0{,}0000, 0{,}0000) = 0{,}0000$$
$$v_2 = -0{,}0000 \cdot (-0{,}0024 + 0{,}0021) = 0{,}0000$$
$$MX_{1,1} = X_i^t + v1 + v2 = -0{,}0024 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = -0{,}0024$$

Ecuación general GOA:

$$r_3 = random() = 0{,}2384$$
$$r_5 = random() = 0{,}9012$$

$$V(2 \cdot \pi \cdot r_3) = V(2 \cdot \pi \cdot 0{,}2384) = V(1{,}4981150821851663)$$
$$x \leq \pi \rightarrow 1{,}4981 \leq \pi$$
$$V(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot 1{,}4981 + 1 = 0{,}5231$$
$$b = 2 \cdot 0{,}5231 \cdot 0{,}0000 = 0{,}0000$$

$$B = (2 \cdot 0{,}9012 - 1) \cdot 0{,}0000 = 0{,}0000$$
$$v_1 = random(-b, b) = random(-0{,}0000, 0{,}0000) = 0{,}0000$$
$$v_2 = -0{,}0000 \cdot (0{,}0026 - 0{,}0018) = 0{,}0000$$
$$MX_{1,2} = X_i^t + v1 + v2 = 0{,}0026 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = 0{,}0026$$

GOA: Ejemplo prático - ind 1 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$X_1 = [-0{,}0024, 0{,}0026] \rightarrow f_{X_1} = 0{,}0000$$
$$MX_1 = [-0{,}0024, 0{,}0026] \rightarrow f_{MX_1} = 0{,}0000$$
$$f_{MX_1} \geq f_{X_1}$$
$$0{,}0000 \geq 0{,}0000 \rightarrow X_1 \text{ se mantiene}$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$r = random() = 0{,}0942$$
$$r \leq 0{,}5 \rightarrow 0{,}0942 \leq 0{,}5$$
$$r_6 = random() = 0{,}4555$$
$$L = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot r_6 = 0{,}2 + (2 - 0{,}2) \cdot 0{,}4555 = 1{,}0200$$
$$R = \frac{M \cdot vel^2}{L} = \frac{2{,}5000 \cdot 1{,}5000^2}{1{,}0200} = 5{,}5149$$
$$capturability = \frac{1}{5{,}5149 \cdot 2{,}0000} = 0{,}0907$$
$$capturability < c \rightarrow 0{,}0907 < 0{,}2$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - dim 1 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$\mu = random() = 0{,}4564$$
$$v = random() = 0{,}5737$$

$$\sigma = \left(\frac{\Gamma(1+1{,}5) \cdot sin\left(\frac{\pi 1{,}5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+1{,}5}{2}\right) \cdot 1{,}5x2^{\left(\frac{1{,}5-1}{2}\right)}} \right) = 0{,}6966$$

$$P = levy(Dim) = 0{,}01x\frac{0{,}4564x0{,}6966}{|0{,}5737|^{\frac{1}{1{,}5}}} = 0{,}0046$$
$$MX_{2,1} = -0{,}0018 - (-0{,}0018 - -0{,}0018) \cdot 0{,}0046 \cdot 0{,}0000 = -0{,}0018$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - dim 2 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$\mu = random() = 0{,}6519$$
$$v = random() = 0{,}6795$$

$$\sigma = \left(\frac{\Gamma(1+1{,}5) \cdot sin\left(\frac{\pi 1{,}5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+1{,}5}{2}\right) \cdot 1{,}5x2^{\left(\frac{1{,}5-1}{2}\right)}} \right) = 0{,}6966$$

$$P = levy(Dim) = 0{,}01 \cdot \frac{0{,}6519 \cdot 0{,}6966}{|0{,}6795|^{\frac{1}{1{,}5}}} = 0{,}0059$$
$$MX_{2,2} = 0{,}0010 - (0{,}0010 - 0{,}0010) \cdot 0{,}0059 \cdot 0{,}0000 = 0{,}0010$$

GOA: Ejemplo prático - ind 2 - iter 500

Ecuación general GOA:

$$X_2 = [-0{,}0018, 0{,}001] \rightarrow f_{X_2} = 0{,}0000$$
$$MX_2 = [29{,}0399, 31{,}6812] \rightarrow f_{MX_2} = 0{,}0000$$
$$f_{MX_2} \geq f_{X_2}$$
$$0{,}0000 \geq 0{,}0000 \rightarrow X_2 \text{ se mantiene}$$

Restricción: $x_1, x_2 \in [-100, 100]$

Soliciones obtenidas en la iteración 500:
ind 1: [-0.0024, 0.0026], infactibles: 0
ind 2: [-0.0018, 0.001], infactibles: 0

Reparación de soluciones:
ind 1: [-0.0024, 0.0026] / fitness: 0.0000
ind 2: [-0.0018, 0.001] / fitness: 0.0000

Mejor solución:
ind 2: [-0.0018, 0.001] / fitness: 0.0000