Optimización Estocástica

Hill-Climbing

Dr. Broderick Crawford Labrín

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Hill-Climbing

- Inicio en una solución factible.
- En cada iteración se visita un mejor vecino factible.
- El algoritmo termina cuando no encuentra soluciones vecinas factibles o ninguna solución vecina factible mejora la función de evaluación

Hill-Climbing

- **Paso 0:** *Inicialización*
  - Elegir solución factible inicial x^0
  - $t \longleftarrow 0$
- **Paso 1:** *Óptimo Local*
  - Si ningún $\triangle x \in M$ es factible y mejora x^t se termina siendo x^t el óptimo local.
- **Paso 2:** *Movimiento*
  - Elegir un $\triangle x$ factible y hacer $\triangle x^{t+1}$
- **Paso 3:** *Actualizar*
  - $x^{t+1} \longleftarrow x^t + \triangle x^{t+1}$
- **Paso 4:** *Incremento*
  - $t \longleftarrow t + 1$
  - Volver al paso 1.

Hill-Climbing

Considerando

$$\text{Max z} = 20x_1 - 4x_2 + 14x_3$$

Sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

El punto inicial: $x^0 = (1, 1, 0)$
El conjunto de movimientos:

$$\text{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Factibilidad de la solución inicial

¿El punto inicial $x^0 = (1,1,0)$ satisface todas las restricciones?

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

Verificando:

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 3 \leq 5 \surd$$

$$1 \in \{0,1\} \surd$$

$$1 \in \{0,1\} \surd$$

$$1 \in \{0,1\} \surd$$

Por lo tanto, la solución inicial es factible.

Evaluación de z en la solución incial

La función

$$z = 20 \times x_1 - 4 \times x_2 + 14 \times x_3$$

es evaluada en la solución incial

$$x^0 = (1, 1, 0)$$

$$z = 20 \times 1 - 4 \times 1 + 14 \times 0 = 16$$

La búsqueda comenzará desde este punto intentando mejorar este valor de $z = 16$.

Generación de soluciones vecinas

Considerando el conjunto de movimientos

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

las soluciones vecinas de $x^0 = (1, 1, 0)$ son:

$$(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (2, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (-1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 1, 0) = (1, 2, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, -1) = (1, 1, -1)$$

Factibilidad de las soluciones vecinas

¿Las soluciones vecinas satisfacen todas las restricciones?

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

Verificando:

$$2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 5 \leq 5 \ \& \ 2 \notin \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \times$$

$$2 \times 0 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 1 \leq 5 \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \surd$$

$$2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 0 = 4 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 2 \notin \{0,1\} \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 0 + 4 \times 0 = 2 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \surd$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \not\leq 5 \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times -1 = -1 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ -1 \notin \{0,1\} \ \times$$

Evaluación de z en las soluciones factibles

La función

$$z = 20 \times x_1 - 4 \times x_2 + 14 \times x_3$$

es evaluada en las soluciones factibles (0,1,0) y (1,0,0):

$$\text{En } (0,1,0)\text{: z } = 20 \times 0 - 4 \times 1 + 14 \times 0 = -4$$

$$\text{En } (1,0,0)\text{: z } = 20 \times 1 - 4 \times 0 + 14 \times 0 = 20$$

La solución (1,0,0) mejora la solución actual ($z = 16$), por lo tanto, la búsqueda continua desde este punto.

Elección del conjunto de movimientos

- En teoría, se podría considerar cada solución como vecina de otra y así obtener el óptimo global.
- En la práctica, se debe aceptar situaciones peores.
- M debe ser lo suficientemente compacto como para verificar en cada iteración todos los vecinos.
- M demasiado limitado visita pocas soluciones lo que redunda en mala calidad.
- Mientras más grande M mejor es la solución óptima local.

Considerando

$$\text{Max z } = 20x_1 - 4x_2 + 14x_3$$

Sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

El punto incial: $x^0 = (1, 1, 0)$
El conjunto de movimientos:

$$\text{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Elección del conjunto de movimientos

Factibilidad de la solución inicial:

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 3 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 1 \in \{0,1\} \ \& \ 0 \in \{0,1\} \ \surd$$

Por lo tanto, la solución inicial es factible.
Vecinos de x^0 :

$$(1,1,0) + (1,0,0) = (2,1,0)$$

$$(1,1,0) + (0,1,0) = (1,2,0)$$

$$(1,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$$

Elección del conjunto de movimientos

Factibilidad de vecinos:

$$2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 5 \leq 5 \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 0 = 4 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \nleq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \times$$

Al no existir soluciones vecinas factibles el algoritmo termina.
La solución óptima local es (1,1,0) con $z = 16$.

Conjunto de movimientos de complemento simple

- $1 \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow 1$

Considerando

$$\text{Max z } = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Solución inicial: (1,0,0,0)
M = Complemento simple

Conjunto de movimientos de complemento simple

Comenzando en (1,0,0,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,0,0)	$\surd$	0
(1,1,0,0)	$\times$	-
(1,0,1,0)	$\surd$	29
(1,0,0,1)	$\surd$	32

Continuando en (1,0,1,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,1,0)	$\surd$	11
(1,1,1,0)	$\times$	-
(1,0,0,0)	$\surd$	18
(1,0,1,1)	$\times$	-

Conjunto de movimientos de complemento simple

Solución óptima local: (1,0,1,0) con $z = 29$
Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	(1,0,0,0)	18	Primer vecino:(1,0,1,0)
1	(1,0,1,0)	29	Fin

Selección del vecino

El criterio de selección de la solución vecina factible donde se continuará la búsqueda también influye en la calidad del algoritmo.

Alternativas:

- El primer vecino factible que mejora z.
- El vecino factible que más mejora z.
- Un vecino factible aleatorio que mejora z.

Consecuencias:

- El primer vecino factible permite cálculos más rápidos pues no es necesario analizar todos los vecinos.
- El mejor vecino factible y el vecino factible aleatorio requieren calcular todos los vecinos antes de determinar cómo continuar la búsqueda y, por lo tanto, implican mayor cantidad de cálculos.
- En general, el mejor vecino factible entrega mejores resultados aun cuando una selección aleatoria también puede entregar buenos resultados.

Selección del mejor vecino factible

Considerando

$$\text{Max z } = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Solución inicial: (1,0,0,0)
M = Complemento simple

Selección del mejor vecino factible

Comenzando en (1,0,0,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,0,0)	$\surd$	0
(1,1,0,0)	$\times$	-
(1,0,1,0)	$\surd$	29
(1,0,0,1)	$\surd$	32

Continuando en (1,0,0,1):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,0,1)	$\surd$	14
(1,1,0,1)	$\times$	-
(1,0,1,1)	$\times$	-
(1,0,0,0)	$\surd$	18

Selección del mejor vecino factible

Solución óptima local: (1,0,0,1) con $z = 32$.
Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	(1,0,0,0)	18	Mejor vecino: (1,0,0,1)
1	(1,0,0,1)	32	Fin

Búsqueda con múltiples inicios

- La calidad de la búsqueda depende fuertemente de la solución inicial considerada.
- Al trabajar grandes espacios de búsqueda, una alternativa es considerar múltiples iteraciones del algoritmo comenzando con distintas soluciones iniciales cada vez.
- La mejor solución óptima local es almacenada asegurando un mejor resultado que una búsqueda con una sola solución inicial.
- Las distintas soluciones iniciales pueden ser generadas considerando la naturaleza del problema o bien aleatoriamente.

Búsqueda con múltiples inicios

Considerando

$$\text{Max z } = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Soluciones iniciales: (1,0,0,0), (0,1,0,0) y (0,0,1,0)
M = Complemento simple
Selección del mejor vecino.

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en (1,0,0,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,0,0)	$\surd$	0
(1,1,0,0)	$\times$	-
(1,0,1,0)	$\surd$	29
(1,0,0,1)	$\surd$	32

Continuando en (1,0,0,1):

Vecinos	Factibilidad	z
(0,0,0,1)	$\surd$	14
(1,1,0,1)	$\times$	-
(1,0,1,1)	$\times$	-
(1,0,0,0)	$\surd$	18

Solución óptima local: (1,0,0,1) con $z = 32$

Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	(1,0,0,0)	18	Mejor vecino: (1,0,0,1)
1	(1,0,0,1)	32	Fin

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en (0,1,0,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(1,1,0,0)	$\times$	-
(0,0,0,0)	$\surd$	0
(0,1,1,0)	$\surd$	36
(0,1,0,1)	$\surd$	39

Continuando en (0,1,0,1):

Vecinos	Factibilidad	z
(1,1,0,1)	$\times$	-
(0,0,0,1)	$\surd$	14
(0,1,1,1)	$\times$	-
(0,1,0,0)	$\surd$	25

Búsqueda con múltiples inicios

Solución óptimo local: (0,1,0,1) con $z = 39$
Resumiendo:

t	x^t	z	Obeservaciones
0	(0,1,0,0)	25	Mejor vecino: (0,1,0,1)
1	(0,1,0,1)	39	Fin

Por lo tanto, la mejor solución local hasta el momento es (0,1,0,1) con $z = 39$.

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en (0,0,1,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(1,0,1,0)	$\surd$	29
(0,1,1,0)	$\surd$	36
(0,0,0,0)	$\surd$	0
(0,0,1,1)	$\surd$	25

Continuando en (0,1,1,0):

Vecinos	Factibilidad	z
(1,1,1,0)	$\times$	-
(0,0,1,0)	$\surd$	11
(0,1,0,0)	$\surd$	25
(0,1,1,1)	$\times$	-

Búsqueda con múltiples inicios

Solución óptima local: (0,1,1,0) con $z = 36$.
Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	(0,0,1,0)	11	Mejor vecino: (0,1,1,0)
1	(0,1,1,0)	36	Fin

Finalmente, la mejor solución óptima local es (0,1,0,1) con $z = 39$.