# Programación Dinámica

(Multiplicación Encadenada de Matrices)

Taller de Programación

Wenceslao Palma <wenceslao.palma@ucv.cl>

# ::Intro

La idea de la Programación Dinámica es sencilla: “evitar calcular dos veces una misma cosa, generando una tabla de resultados conocidos que se va llenando en la medida que se resuelven subcasos”.

La Programación Dinámica es una técnica ascendente. Se comienza por subcasos pequeños y más sencillos. Combinándolos tenemos respuesta para subcasos de mayor tamaño, hasta que finalmente se llega a la solución del caso original.

La Programación Dinámica se aplica generalmente a un problema de optimización.

Para aplicar Programación Dinámica es necesario verificar que el problema tiene:

Sub-estructura óptima (Principio de Optimalidad): la solución óptima a un problema se construye a partir de soluciones óptimas de sus subproblemas.

Superposición de problemas: al especular sobre la existencia de una solución basada en recursividad nos damos cuenta que muchos cálculos se deberán rehacer.

# ::Multiplicación encadenada de matrices

Sea una matriz $A_{pxq}$, una matriz $B_{qxr}$ y $C_{rxs}$.

La multiplicación ABC se puede calcular de dos formas: (AB)C y A(BC)

Y la cantidad de multiplicaciones necesarias es:

$$mult[(AB)C] = pqr + prs$$

$$mult[A(BC)] = qrs + pqs$$

Si p=5, q=4, r=6 y s=2, entonces:

$$mult[(AB)C] = 180$$

$$mult[A(BC)] = 88$$

**La asociatividad en la multiplicación es importante!!!**

# ::Solución utilizando Programación Dinámica

La solución debe estar compuesta por la secuencia de multiplicación de matrices que minimice la cantidad de multiplicaciones elementales.

Idea: Descomponer el problema en subproblemas.

Si se desea multiplicar n matrices $A_1A_2A_3.....A_n$ , para cualquier secuencia óptima de multiplicación $A_{i..j}$ , en el último paso se están multiplicando 2 matrices, esto es:

$$A_{i..j}= (A_i.........A_k)(A_{k+1}...........A_j), \text{ para algún } k$$

Cuál es el valor de k?

Cómo se multiplican de manera óptima $A_{i..k}$ y $A_{k+1..j}$ ?

**Este problema cumple con el principio de optimalidad!!!**

## ::Solución utilizando Programación Dinámica

Podemos definir una matriz M en donde se almacenen algunos cálculos parciales. De este modo para calcular $A_{i..j}$

$$m[i,j] = 0 \qquad i=j$$

$$m[i,j] = \min_{i<=k<j}(m[i,k]+m[k+1,j]+C) \qquad i<j$$

Donde:

m[i,j] = denota la mínima cantidad de multiplicaciones para calcular $A_{i..j}$

C: es el costo de multiplicar $A_{i..k}A_{k+1..j}$

# ::Solución utilizando Programación Dinámica

El valor de una solución óptima se calculará en forma ascendente.

Asi cada vez que se necesite calcular m[i,j] ya se habrán calculado m[i,k] y m[k+1,j]

## ::Ejemplo

Considere la multiplicación de $A_1A_2A_3A_4$ , donde: $A_{1(5x4)}$, $A_{2(4x6)}$, $A_{3(6x2)}$, $A_{4(2x7)}$

Sol.:

Inicialmente

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| 2 | | 0 | | |
| 3 | | | 0 | |
| 4 | | | | 0 |

Luego, debemos calcular:

$$m[1,2]=min_{1\leq k\leq 2}(m[1,k]+m[k+1,2]+C$$
$$m[1,2]=m[1,1]+m[2,2]+C=120$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | | |
| 2 | | 0 | | |
| 3 | | | 0 | |
| 4 | | | | 0 |

# ::Ejemplo

$$m[2,3]=min_{2\le k\le 3}(m[2,k]+m[k+1,3]+C$$
$$m[2,3]=m[2,2]+m[3,3]+C=48$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | | |
| 2 | | 0 | 48 | |
| 3 | | | 0 | |
| 4 | | | | 0 |

$$m[3,4]=min_{3\le k\le 4}(m[3,k]+m[k+1,4]+C$$
$$m[3,4]=m[3,3]+m[4,4]+C=84$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | | |
| 2 | | 0 | 48 | |
| 3 | | | 0 | 84 |
| 4 | | | | 0 |

## ::Ejemplo

$$m[1,3]=min_{1\leq k\leq 3}(m[1,k]+m[k+1,3]+C$$
$$m[1,3]=min(m[1,1]+m[2,3]+C,m[1,2]+m[3,3]+C)=min(40+48,120+60)=88$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | 88 | |
| 2 | | 0 | 48 | |
| 3 | | | 0 | 84 |
| 4 | | | | 0 |

$$m[2,4]=min_{2\leq k\leq 4}(m[2,k]+m[k+1,4]+C$$
$$m[2,4]=min(m[2,2]+m[3,4]+C,m[2,3]+m[4,4]+C)=104$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | 88 | |
| 2 | | 0 | 48 | 104 |
| 3 | | | 0 | 84 |
| 4 | | | | 0 |

# ::Ejemplo

$$m[1,4]=min_{1\le k\le 4}(m[1,k]+m[k+1,4]+C$$

$$m[1,4]=min(m[1,1]+m[2,4]+C, m[1,2]+m[3,4]+C, m[1,3]+m[4,4]+C)=158$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 120 | 88 | 158 |
| 2 | | 0 | 48 | 104 |
| 3 | | | 0 | 84 |
| 4 | | | | 0 |

# ::Ejemplo

**Cómo construir la solución?**

Idea: Al mismo tiempo que se construye M, construir S, donde:

$s[i,j]$: *denota el valor de* $k$ *relacionado con la óptima multiplicación de* $A_{i..j}$

Por ejemplo: considere 6 matrices, entonces S es de 6x6. La forma en la cual se construye la solución es:

$$s[1,6]=3, (A_1 A_2 A_3)(A_4 A_5 A_6)$$
$$s[1,3]=1, A_1(A_2 A_3)$$
$$s[4,6]=5, (A_4 A_5) A_6$$

*Luego, la forma óptima de multiplicar* $A_{1..6}$ *es:*

$$(A_1(A_2 A_3))((A_4 A_5) A_6)$$