Fox-inspired Optimization Algorithm

Dr. Broderick Crawford Labrín

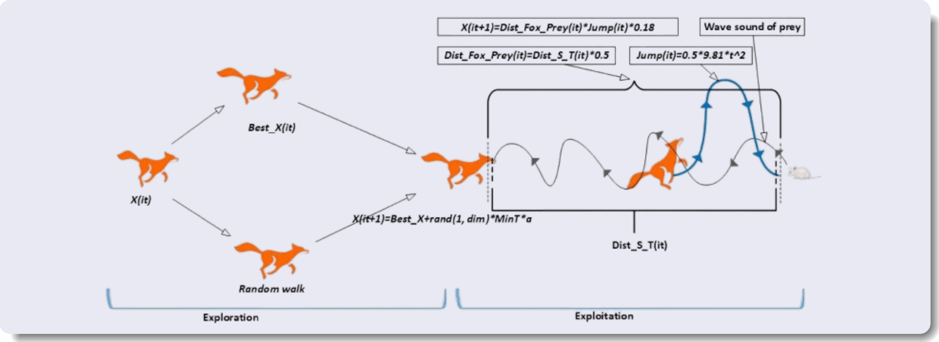
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Fox-inspired Optimization Algorithm (FOX)

- Fue desarrollada por Hardi M. Mohammed y Tarik A. Rashid en el año 2022 [a].
- Es una metaheurística basado en población diseñada para resolver problemas de optimización continuos.
- Sus soluciones (individuos) iniciales se generan aleatoreamente y se van alterando bajo un conjunto de reglas de movimiento con criterios estocásticos.

[a] *FOX: A Fox-inspired Optimization Algorithm*, Research Square (2022)

FOX: Ecuaciones de movimiento



FOX: Ecuaciones de movimiento (Explotación)

- Ecuaciones de movimiento

$$Sp\_S = \frac{BestPosition_{iter}}{Time\_S\_T_{iter}} \tag{1}$$

$$Dist\_S\_T_{iter} = Sp\_S \cdot Time\_S\_T_{iter} \tag{2}$$

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5 \tag{3}$$

- Donde:
  - $BestPosition_{iter}$ es el mejor agente de busqueda por iteración
  - $Time\_S\_T_{iter}$ es un numero random entre [0, 1]
  - Sp_S es la velocidad del sonido en el aire ($343\frac{m}{s}$), pero se puede tomar el valor de la formula
  - $Dist\_Fox\_Prey_{iter}$, es la distancia entre el zorro y la presa:
    - $iter$ es la iteración actual
    - $Dist\_S\_T_{iter}$ distancia que recorre el sonido

FOX: Ecuaciones de movimiento (Explotación)

- Ecuaciones de movimiento

$$tt = \frac{sum\left(Time\_S\_T_{iter}\left(i\right)\right)}{dimension},\ t = \frac{tt}{2} \tag{4}$$

$$Jump_{iter} = 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \tag{5}$$

- Donde:
  - tt Representa el promedio del tiempo, donde:
    - $sum\left(Time\_S\_T_{iter}\left(i\right)\right)$ Es la sumatoria del tiempo de recorrido del sonido
  - $Jump_{iter}$ Representa la altura del salto dado por el zorro con t^2 el tiempo en subir y bajar

FOX: Ecuaciones de movimiento (Explotación)

- Ecuaciones de movimiento

$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1 \tag{6}$$

$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_2 \tag{7}$$

- Donde:
  - X_{iter+1} Representando la nueva poscision del zorro despues del salto, se tomara la formula 6 o 7 dependiendo de un valor random p
    - $c1 = 0{,}18$ (acercandose al optimo)
    - $c2 = 0{,}82$ (alejandose del optimo)

FOX: Ecuaciones de movimiento (Exploración)

- Ecuaciones de movimiento

$$MinT = Min(tt) \tag{8}$$

$$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) \tag{9}$$

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a \tag{10}$$

- Donde:
  - $MinT$ Representa el mínimo del promedio del tiempo (tt)
  - a, donde:
    - $iter$ es la iteracion actual y Max_{iter} es el maximo de iteraciones
  - X_{iter+1}, Se busca una nueva posición, donde:
    - $BestPosition_{iter}$ Es la mejor posición encontrada
    - $randn(1, dimension)$ genera números aleatorios a partir de una distribución normal estándar (media=0, varianza=1)

FOX: Pseudocódigo

Algorithm 1 Fox-inspired Optimization Algorithm

Input: Population X=$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

Output: Updated population X'=$\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ and Best

```
Initialize random fox population X, constant c1, constant c2 and value MinT
for it = 1 to  MaxIt do
    calulate the fitness of each X
    select BestPosition
    a = 2*(1-(it/MaxIt))
    for i=0 to N do
        r and p = random()
        if r ≥ 0.5
            Time_S_T = random(dimension)
            Sp_S = BestPosition / Time_S_T
            Dist_S_T = Sp_S * Time_S_T
            Dist_Fox_Prey = 0.5 * Dist_S_T
            tt = sum(Time_S_T) / dimension
            t = tt / 2
            Jump = 0.5 * 9.81 * t^2
            if p > 0.18
                X[i] = Dist_Fox_Prey * Jump * c1
            else if p ≤ 0.18
                X[i] = Dist_Fox_Prey * Jump * c2
            if MintT > tt
                MinT = tt
        else if r < 0.5
            X[i] = BestPosition + randn(dimension) * (MinT * a)
return updated population X' and BestPosition
```

FOX: Ejemplo práctico - parámetros iniciales

Considerando

$$\text{Min } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Sujeto a

$$x_1, x_2, x_3 \in [-100, 100]$$

Configuración inicial de FOX:

- Tamaño de la población: 2 individuos
- Número máximo de iteraciones: 100 iteraciones
- Constante c1 = 0,18 y c2 = 0,82

FOX: Ejemplo práctico - soluciones inciales

Soluciones inciales:
ind 1: [10.2468 67.1725 2.6547] / fitness: 4624.1871
ind 2: [87.3139 -49.3293 50.2449] / fitness: 12581.6444

Mejor solución:
ind 1: [10.2468 67.1725 2.6547] / fitness: 4624.1871

FOX: Ejemplo práctico - ind 1 - iter 1

Ecuaciones generales de la iteración 1:

$$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)\right) = 1{,}98$$

$$r = 0{,}3378$$

$$MinT = Min(tt) = 0$$

Al ser $r < 0,5$ se realiza la sección de exploración

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 1 - dim 1

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 10{,}2468$ / $randn(1,1) = -0{,}7796$ / $MinT = 0$ / $a = 1,98$

$$X_2 = 10{,}2468 - 0{,}7796 \cdot 0 \cdot 1,98$$
$$X_2 = 10{,}2468$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 1 - dim 2

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 67{,}1725$ / $randn(1, 2) = -0{,}5295$ / $MinT = 0$ / $a = 1, 98$

$$X_2 = 67{,}1725 - 0{,}5295 \cdot 0 \cdot 1, 98$$
$$X_2 = 67{,}1725$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 1 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} \ = \ BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 2{,}6547 \ / \ randn(1, 2) = -0{,}7184 \ / \ MinT = 0 \ / \ a = 1, 98$

$$X_2 \ = \ 2{,}6547 - 0{,}7184 \cdot 0 \cdot 1, 98$$
$$X_2 \ = \ 2{,}6547$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 2

Ecuaciones generales de la iteración 1:

$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)\right) = 1{,}98$

$r = 0{,}0510$

$MinT = Min(tt) = 0$

Al ser $r < 0,5$ se realiza la sección de exploración

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 2 - dim 1

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 10{,}2468$ / $randn(1,2) = -0{,}3056$ / $MinT = 0$ / $a = 1,98$

$$X_2 = 10{,}2468 - 0{,}3056 \cdot 0 \cdot 1,98$$
$$X_2 = 10{,}2468$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 2 - dim 2

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} \;=\; BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 67{,}1725$ / $randn(1,2) = 0{,}8399$ / $MinT = 0$ / $a = 1,98$

$$\begin{aligned} X_2 &= 67{,}1725 + 0{,}8399 \cdot 0 \cdot 1,98 \\ X_2 &= 67{,}1725 \end{aligned}$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 1 - ind 2 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_1 = 2{,}6547$ / $randn(1, 2) = 0{,}9033$ / $MinT = 0$ / $a = 1, 98$

$$X_2 = 2{,}6547 + 0{,}9033 \cdot 0 \cdot 1, 98$$
$$X_2 = 2{,}6547$$

FOX: Ejemplo práctico - validación restricciones

Restricción: $x_1, x_2, x_3 \in [-100, 100]$

Soluciones obtenidas en la iteración 1:
ind 1: [10.2468, 67.1725, 2.6547], infactibles: 0
ind 2: [10.2468, 67.1725, 2.6547], infactibles: 0

Reparacion de soluciones:
ind 1: [10.2468, 67.1725, 2.6547] / fitness: 4624.1871
ind 2: [10.2468, 67.1725, 2.6547] / fitness: 4624.1871

Mejor solución:
ind 1: [10.2468, 67.1725, 2.6547] / fitness: 4624.1871

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 1

Ecuaciones generales de la iteración 2:

$$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{2}{100}\right)\right) = 1{,}96$$

$$r = 0{,}2327$$

$$MinT = Min(tt) = 0$$

Al ser $r < 0,5$ se realiza la sección de exploración

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 1 - dim 1

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} \;=\; BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_2 = 10{,}2468 \ / \ randn(1,2) = -2{,}2278 \ / \ MinT = 0 \ / \ a = 1,96$

$$\begin{aligned} X_3 &= 10{,}2468 - 2{,}2278 \cdot 0 \cdot 1,96 \\ X_3 &= 10{,}2468 \end{aligned}$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 1 - dim 2

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_2 = 67{,}1725$ / $randn(1,2) = 0{,}2177$ / $MinT = 0$ / $a = 1,96$

$$X_3 = 67{,}1725 + 0{,}2177 \cdot 0 \cdot 1,96$$
$$X_3 = 67{,}1725$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 1 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_2 = 2{,}6547 \ / \ randn(1,2) = -0{,}1358 \ / \ MinT = 0 \ / \ a = 1,96$

$$X_3 = 2{,}6547 - 0{,}1358 \cdot 0 \cdot 1,96$$
$$X_3 = 2{,}6547$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 2

Ecuaciones generales de la iteración 2:

$tt = \frac{sum(Time\_S\_T_{iter}(i))}{dimension} = \frac{sum(0{,}667;0{,}381;0{,}7925))}{3} = 0{,}6135$

$t = \frac{0{,}6135}{2} = 0,3068$

$Jump_2 = 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 0,3068^2 = 0{,}4615$

$r = 0{,}8000$

Al ser $r \geq 0,5$ se realiza la sección de explotación

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$Time\_S\_T_2 = 0{,}6670$
$Dist\_S\_T_2 = BestPosition_2 = 10{,}2468$
$Dist\_Fox\_Prey_2 = 10{,}2468 \cdot 0{,}5 = 5{,}1234$
$p = 0{,}2604$
$X_3 = 5{,}1234 \cdot 0{,}4615 \cdot 0{,}1800 = 0{,}4256$

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 2 - dim 2

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$Time\_S\_T_2 = 0{,}3810$
$Dist\_S\_T_2 = BestPosition_2 = 67{,}1725$
$Dist\_Fox\_Prey_2 = 67{,}1725 \cdot 0{,}5 = 33{,}5862$
$p = 0{,}2604$
$X_3 = 33{,}5862 \cdot 0{,}4615 \cdot 0{,}1800 = 2{,}790$

FOX: Ejemplo práctico - iter 2 - ind 2 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$Time\_S\_T_2 = 0{,}7925$

$Dist\_S\_T_2 = BestPosition_2 = 2{,}6547$

$Dist\_Fox\_Prey_2 = 2{,}6547 \cdot 0{,}5 = 1{,}3273$

$p = 0{,}2604$

$X_3 = 1{,}3273 \cdot 0{,}4615 \cdot 0{,}1800 = 0{,}1102$

FOX: Ejemplo práctico - validación restricciones

Restricción: $x_1, x_2, x_3 \in [-100, 100]$

Soluciones obtenidas en la iteración 2:
ind 1: [10.2468, 67.1725, 2.6547], infactibles: 0
ind 2: [0.4256, 2.7903, 0.1103], infactibles: 0

Reparación de soluciones:
ind 1: [10.2468, 67.1725, 2.6547] / fitness: 4624.1871
ind 2: [0.4256, 2.7903, 0.1103] / fitness: 7.9789

Mejor solución:
ind 2: [0.4256, 2.7903, 0.1103] / fitness: 7.9789

Ecuaciones generales de la iteración 100:

$$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{100}{100}\right)\right) = 0{,}0$$

$$r = 0{,}7337$$

$$tt = \frac{sum(Time\_S\_T_{iter}(i))}{dimension} = \frac{sum(0{,}12360{,}04560{,}4123))}{3} = 0{,}1938$$

$$t = \frac{0{,}1938}{2} = 0{,}0969$$

$$Jump_{100} = 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0969^2 = 0{,}0461$$

Al ser $r \geq 0,5$ se realiza la sección de explotación

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$Time\_S\_T_{100} = 0{,}1236$
$Dist\_S\_T_{100} = BestPosition_2 = 0{,}0000$
$Dist\_Fox\_Prey_{100} = 0{,}0000 \cdot 0{,}5 = 0$
$p = 0{,}4447$
$X_{101} = 0{,}0000... \cdot 0{,}0461 \cdot 0{,}1800 = 9{,}6228e^{-126}$

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$Time\_S\_T_{100} = 0{,}0456$
$Dist\_S\_T_{100} = BestPosition_2 = 0{,}0000$
$Dist\_Fox\_Prey_{100} = 0{,}0000 \cdot 0{,}5 = 0{,}0000...$
$p = 0{,}4447$
$X_{101} = 0{,}0000... \cdot 0{,}0461 \cdot 0{,}1800 = 6{,}3081e^{-125}$

FOX: Ejemplo práctico - iter 100 - ind 1 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$Dist\_Fox\_Prey_{iter} = Dist\_S\_T_{iter} \cdot 0{,}5$$
$$X_{iter+1} = Dist\_Fox\_Prey_{iter} \cdot Jump_{iter} \cdot c_1$$

$$Time\_S\_T_{100} = 0{,}4123$$
$$Dist\_S\_T_{100} = BestPosition_2 = 0{,}0000$$
$$Dist\_Fox\_Prey_{100} = 0{,}0000 \cdot 0{,}5 = 0{,}0000...$$
$$p = 0{,}4447$$
$$X_{101} = 0{,}0000... \cdot 0{,}0461 \cdot 0{,}1800 = 2{,}4930e^{-126}$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 100 - ind 2

Ecuaciones generales de la iteración 100:
$a = 2\left(iter - \left(\frac{1}{Max_{iter}}\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{100}{100}\right)\right) = 0{,}0$
$r = 0{,}2442$
$MinT = Min(tt) = 0$

Al ser $r < 0,5$ se realiza la sección de exploración

FOX: Ejemplo práctico - iter 100 - ind 2 - dim 1

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_{100} = 0{,}0000$ / $randn(1,1) = 0{,}6194$ / $MinT = 0{,}0000$ / $a = 0{,}0000$

$$X_{101} = 0{,}0000 + 0{,}6194 \cdot 0{,}0000 \cdot 0{,}0000$$
$$X_{101} = 0{,}0000$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 100 - ind 2 - dim 2

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_2 = 0{,}0000$ / $randn(1,2) = 0{,}0000$ / $MinT = 0{,}0000$ / $a = 0{,}0000$

$$X_{101} = 0{,}0000 - 0{,}7294 \cdot 0{,}0000 \cdot 0{,}0000$$
$$X_{101} = 0{,}0000$$

FOX: Ejemplo práctico - iter 100 - ind 2 - dim 3

Ecuación general FOX:

$$X_{iter+1} = BestPosition_{iter} + randn(1, dimension) \cdot MinT \cdot a$$

$BestPosition_2 = 0{,}0000$ / $randn(1,2) = 0{,}1147$ / $MinT = 0{,}0000$ / $a = 0{,}0000$

$$X_3 = 0{,}0000 + 0{,}1147 \cdot 0{,}0000 \cdot 0{,}0000$$
$$X_3 = 0{,}0000$$

FOX: Ejemplo práctico - validación restricciones

Restricción: $x_1, x_2, x_3 \in [-100, 100]$

Soluciones obtenidas en la iteración 100:
ind 1: $[9.6229e^{-126}, 6.3082e^{-125}, 2.4930e^{-126}]$, infactibles: 0
ind 2: $[2.3203e^{-123}, 1.5211e^{-122}, 6.0114e^{-124}]$, infactibles: 0

Reparación de soluciones:
ind 1: $[9.6229e^{-126}, 6.3082e^{-125}, 2.4930e^{-126}]$ / fitness: 0.0000
ind 2: $[2.3203e^{-123}, 1.5211e^{-122}, 6.0114e^{-124}]$ / fitness: 0.0000

Mejor solución:
ind 1: $[9.6229e^{-126}, 6.3082e^{-125}, 2.4930e^{-126}]$ / fitness: 0.0000