

Optimización Estocástica

Hill-Climbing

Dr. Broderick Crawford Labrín

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

- Inicio en una solución factible.
- En cada iteración se visita un mejor vecino factible.
- El algoritmo termina cuando no encuentra soluciones vecinas factibles o ninguna solución vecina factible mejora la función de evaluación

- **Paso 0: Inicialización**

- Elegir solución factible inicial x^0
- $t \leftarrow 0$

- **Paso 1: Óptimo Local**

- Si ningún $\Delta x \in M$ es factible y mejora x^t se termina, siendo x^t el óptimo local.

- **Paso 2: Movimiento**

- Elegir un Δx factible y hacer Δx^{t+1}

- **Paso 3: Actualizar**

- $x^{t+1} \leftarrow x^t + \Delta x^{t+1}$

- **Paso 4: Incremento**

- $t \leftarrow t + 1$
- Volver al paso 1.

Considerando

$$\text{Max } z = 20x_1 - 4x_2 + 14x_3$$

Sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

El punto inicial: $x^0 = (1, 1, 0)$

El conjunto de movimientos:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

¿El punto inicial $x^0 = (1, 1, 0)$ satisface todas las restricciones?

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

Verificando:

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 3 \leq 5 \checkmark$$

$$1 \in \{0, 1\} \checkmark$$

$$1 \in \{0, 1\} \checkmark$$

$$0 \in \{0, 1\} \checkmark$$

Por lo tanto, la solución inicial es factible.

La función

$$z = 20 \times x_1 - 4 \times x_2 + 14 \times x_3$$

es evaluada en la solución inicial

$$x^0 = (1, 1, 0)$$

$$z = 20 \times 1 - 4 \times 1 + 14 \times 0 = 16$$

La búsqueda comenzará desde este punto intentando mejorar este valor de $z = 16$.

Generación de soluciones vecinas

Considerando el conjunto de movimientos

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

las soluciones vecinas de $x^0 = (1, 1, 0)$ son:

$$(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (2, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (-1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 1, 0) = (1, 2, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, -1) = (1, 1, -1)$$

Factibilidad de las soluciones vecinas

¿Las soluciones vecinas satisfacen todas las restricciones?

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

Verificando:

$$2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 5 \leq 5 \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \times$$

$$2 \times 0 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 1 \leq 5 \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \checkmark$$

$$2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 0 = 4 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 0 + 4 \times 0 = 2 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \checkmark$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \not\leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times -1 = -1 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ -1 \notin \{0, 1\} \times$$

Evaluación de z en las soluciones factibles

La función

$$z = 20 \times x_1 - 4 \times x_2 + 14 \times x_3$$

es evaluada en las soluciones factibles $(0,1,0)$ y $(1,0,0)$:

$$\text{En } (0,1,0): z = 20 \times 0 - 4 \times 1 + 14 \times 0 = -4$$

$$\text{En } (1,0,0): z = 20 \times 1 - 4 \times 0 + 14 \times 0 = 20$$

La solución $(1,0,0)$ mejora la solución actual ($z = 16$), por lo tanto, la búsqueda continua desde este punto.

Elección del conjunto de movimientos

- En teoría, se podría considerar cada solución como vecina de otra y así obtener el óptimo global.
- En la práctica, se debe aceptar situaciones peores.
- M debe ser lo suficientemente compacto como para verificar en cada iteración todos los vecinos.
- M demasiado limitado visita pocas soluciones lo que redundaría en mala calidad.
- Mientras más grande M mejor es la solución óptima local.

Elección del conjunto de movimientos

Considerando

$$\text{Max } z = 20x_1 - 4x_2 + 14x_3$$

Sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

El punto inicial: $x^0 = (1, 1, 0)$

El conjunto de movimientos:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Factibilidad de la solución inicial:

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 3 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \ \checkmark$$

Por lo tanto, la solución inicial es factible.

Vecinos de x^0 :

$$(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (2, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 1, 0) = (1, 2, 0)$$

$$(1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

Factibilidad de vecinos:

$$2 \times 2 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 5 \leq 5 \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 0 = 4 \leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 2 \notin \{0, 1\} \ \& \ 0 \in \{0, 1\} \times$$

$$2 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \not\leq 5 \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \ \& \ 1 \in \{0, 1\} \times$$

Al no existir soluciones vecinas factibles el algoritmo termina.

La solución óptima local es $(1,1,0)$ con $z = 16$.

Conjunto de movimientos de complemento simple

- $1 \rightarrow 0$
- $0 \rightarrow 1$

Considerando

$$\text{Max } z = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Solución inicial: $(1, 0, 0, 0)$

M = Complemento simple

Conjunto de movimientos de complemento simple

Comenzando en $(1,0,0,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,0,0)$	✓	0
$(1,1,0,0)$	×	-
$(1,0,1,0)$	✓	29
$(1,0,0,1)$	✓	32

Continuando en $(1,0,1,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,1,0)$	✓	11
$(1,1,1,0)$	×	-
$(1,0,0,0)$	✓	18
$(1,0,1,1)$	×	-

Conjunto de movimientos de complemento simple

Solución óptima local: $(1,0,1,0)$ con $z = 29$

Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	$(1,0,0,0)$	18	Primer vecino: $(1,0,1,0)$
1	$(1,0,1,0)$	29	Fin

Selección del vecino

El criterio de selección de la solución vecina factible donde se continuará la búsqueda también influye en la calidad del algoritmo.

Alternativas:

- El primer vecino factible que mejora z .
- El vecino factible que más mejora z .
- Un vecino factible aleatorio que mejora z .

Consecuencias:

- El primer vecino factible permite cálculos más rápidos pues no es necesario analizar todos los vecinos.
- El mejor vecino factible y el vecino factible aleatorio requieren calcular todos los vecinos antes de determinar cómo continuar la búsqueda y, por lo tanto, implican mayor cantidad de cálculos.
- En general, el mejor vecino factible entrega mejores resultados aun cuando una selección aleatoria también puede entregar buenos resultados.

Selección del mejor vecino factible

Considerando

$$\text{Max } z = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Solución inicial: (1,0,0,0)

M = Complemento simple

Selección del mejor vecino factible

Comenzando en $(1,0,0,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,0,0)$	✓	0
$(1,1,0,0)$	×	-
$(1,0,1,0)$	✓	29
$(1,0,0,1)$	✓	32

Continuando en $(1,0,0,1)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,0,1)$	✓	14
$(1,1,0,1)$	×	-
$(1,0,1,1)$	×	-
$(1,0,0,0)$	✓	18

Selección del mejor vecino factible

Solución óptima local: $(1,0,0,1)$ con $z = 32$.

Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	$(1,0,0,0)$	18	Mejor vecino: $(1,0,0,1)$
1	$(1,0,0,1)$	32	Fin

Búsqueda con múltiples inicios

- La calidad de la búsqueda depende fuertemente de la solución inicial considerada.
- Al trabajar grandes espacios de búsqueda, una alternativa es considerar múltiples iteraciones del algoritmo comenzando con distintas soluciones iniciales cada vez.
- La mejor solución óptima local es almacenada asegurando un mejor resultado que una búsqueda con una sola solución inicial.
- Las distintas soluciones iniciales pueden ser generadas considerando la naturaleza del problema o bien aleatoriamente.

Considerando

$$\text{Max } z = 18x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 14x_4$$

Sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Soluciones iniciales: $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ y $(0,0,1,0)$

M = Complemento simple

Selección del mejor vecino.

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en $(1,0,0,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,0,0)$	✓	0
$(1,1,0,0)$	×	-
$(1,0,1,0)$	✓	29
$(1,0,0,1)$	✓	32

Continuando en $(1,0,0,1)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(0,0,0,1)$	✓	14
$(1,1,0,1)$	×	-
$(1,0,1,1)$	×	-
$(1,0,0,0)$	✓	18

Búsqueda con múltiples inicios

Solución óptima local: $(1,0,0,1)$ con $z = 32$

Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	$(1,0,0,0)$	18	Mejor vecino: $(1,0,0,1)$
1	$(1,0,0,1)$	32	Fin

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en $(0,1,0,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(1,1,0,0)$	×	-
$(0,0,0,0)$	✓	0
$(0,1,1,0)$	✓	36
$(0,1,0,1)$	✓	39

Continuando en $(0,1,0,1)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(1,1,0,1)$	×	-
$(0,0,0,1)$	✓	14
$(0,1,1,1)$	×	-
$(0,1,0,0)$	✓	25

Búsqueda con múltiples inicios

Solución óptimo local: $(0,1,0,1)$ con $z = 39$

Resumiendo:

t	x^t	z	Obeservaciones
0	$(0,1,0,0)$	25	Mejor vecino: $(0,1,0,1)$
1	$(0,1,0,1)$	39	Fin

Por lo tanto, la mejor solución local hasta el momento es $(0,1,0,1)$ con $z = 39$.

Búsqueda con múltiples inicios

Comenzando en $(0,0,1,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(1,0,1,0)$	✓	29
$(0,1,1,0)$	✓	36
$(0,0,0,0)$	✓	0
$(0,0,1,1)$	✓	25

Continuando en $(0,1,1,0)$:

Vecinos	Factibilidad	z
$(1,1,1,0)$	×	-
$(0,0,1,0)$	✓	11
$(0,1,0,0)$	✓	25
$(0,1,1,1)$	×	-

Búsqueda con múltiples inicios

Solución óptima local: $(0,1,1,0)$ con $z = 36$.

Resumiendo:

t	x^t	z	Observaciones
0	$(0,0,1,0)$	11	Mejor vecino: $(0,1,1,0)$
1	$(0,1,1,0)$	36	Fin

Finalmente, la mejor solución óptima local es $(0,1,0,1)$ con $z = 39$.