Teoría de Autómatas y Compiladores [ICI-445]
Capítulo 2: Autómatas Finitos

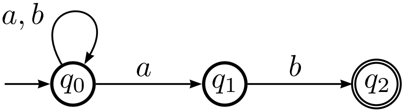
Dr. Ricardo Soto
[ricardo.soto@ucv.cl]
[http://www.inf.ucv.cl/∼rsoto]

Escuela de Ingeniería Informática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Marzo, 2010

1. Introducción

Un **autómata** es una máquina teórica que lee instrucciones en forma de símbolos y cambia de estado según éstas.



Áreas de aplicación de la teoría de autómatas:

- Comunicaciones.
- Teoría de Control.
- Circuitos secuenciales.
- Recocimiento de Patrones.

  ⋮

- **Compiladores**.

2. Autómatas Finitos Deterministas

- Una Autómata Finito Determinista (AFD) se define como una quintupla $M = (Q, V, \delta, q_0, F)$ donde:
  - Q es un conjunto finito de estados.
  - V es el alfabeto de entrada.
  - $\delta : Q \times V \rightarrow Q$ es la función de transición.
  - q_0 es el estado inicial.
  - $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Determinista: se sabe con certeza el estado siguiente conociendo el estado actual y el símbolo a leer.

2. Autómatas Finitos Deterministas

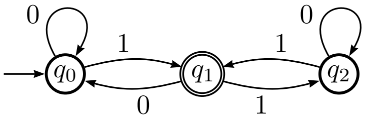
Considere el siguiente autómata: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q1\})$ donde la función $\delta : \{q_0, q_1, q_2\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{q_0, q_1, q_2\}$ viene dada por:

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, 0) = q_0 & \delta(q_0, 1) = q_1 \\ \delta(q_1, 0) = q_0 & \delta(q_1, 1) = q_2 \\ \delta(q_2, 0) = q_2 & \delta(q_2, 1) = q_1 \end{array}$$

- **Tabla de transición**

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
$\# \, q_1$	q_0	q_2
q_2	q_2	q_1

- **Diagrama de transición**



3. Autómatas Finitos No Deterministas

- Una Autómata Finito No Determinista (AFND) se define como una quintupla $M = (Q, V, \Delta, q_0, F)$ donde:
  - Q es un conjunto finito de estados.
  - V es el alfabeto de entrada.
  - $\Delta : Q \times V \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición.
  - q_0 es el estado inicial.
  - $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

No Determinista: No se puede determinar con certeza el estado siguiente conociendo el estado actual y el símbolo a leer.

3. Autómatas Finitos No Deterministas

Considere el siguiente autómata: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \Delta, q_0, \{q1\})$

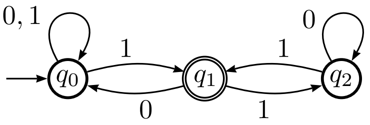
donde la función $\Delta : \{q_0, q_1, q_2\} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\})$ viene dada por:

$$\begin{array}{rr} \Delta(q_0, 0) = \{q_0\} & \Delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} \\ \Delta(q_1, 0) = \{q_0\} & \Delta(q_1, 1) = \{q_2\} \\ \Delta(q_2, 0) = \{q_2\} & \Delta(q_2, 1) = \{q_1\} \end{array}$$

- **Tabla de transición**

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\# \; q_1$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$

- **Diagrama de transición**



4. Autómatas Finitos con λ-transiciones

- Una Autómata Finito con λ-transiciones (AFND-λ) se define como una quintupla $M = (Q, V, \Delta, q_0, F)$ donde:
  - Q es un conjunto finito de estados.
  - V es el alfabeto de entrada.
  - $\Delta : Q \times (V \cup \lambda) \to \mathcal{P}(Q)$ es la función de transición.
  - q_0 es el estado inicial.
  - $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Un AFND-λ puede decidir de forma no determinista entre cambiar de estado consumiendo o no consumiendo un símbolo de entrada.

4. Autómatas Finitos con λ-transiciones

Considere el siguiente autómata: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \Delta, q_0, \{q1\})$

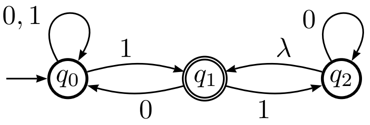
donde la función $\Delta : \{q_0, q_1, q_2\} \times \{0, 1, \lambda\} \rightarrow \mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\})$ viene dada por:

$$\begin{array}{cc} \Delta(q_0, 0) = \{q_0\} & \Delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} \\ \Delta(q_1, 0) = \{q_0\} & \Delta(q_1, 1) = \{q_2\} \\ \Delta(q_2, 0) = \{q_2\} & \Delta(q_2, \lambda) = \{q_1\} \end{array}$$

- **Tabla de transición**

δ	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	-
$\# q_1$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	-
q_2	$\{q_2\}$	-	$\{q_1\}$

- **Diagrama de transición**



5. Ejercicios

Construya un autómata finito para cada uno de los siguientes lenguajes:

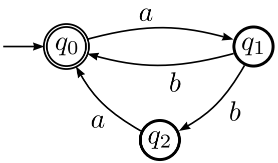
- $L_1 = \{(ab)^n | n > 1\}$
- $L_2 = \{a^n b^m | n \geq 2 \text{ y } m \geq 3\}$
- Todas las palabras que empiezen con a y terminen con o
- Todas las palabras que empiezen con a, tengan una s y terminen con o
- Todas las palabras que tengan entre 3 y 5 letras

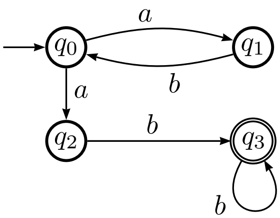
Construya un autómata finito que permita reconocer:

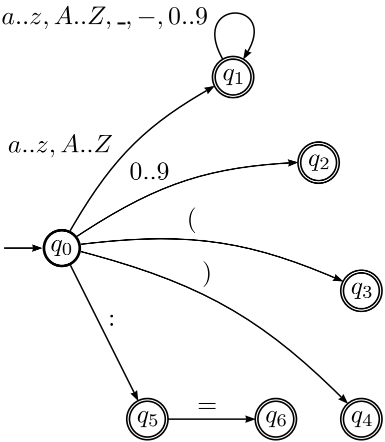
- Un número entero
- Un número real
- Una letra
- Un identificador

5. Ejercicios

Obtener la expresión regular asociada al lenguaje aceptado por los siguientes autómatas:

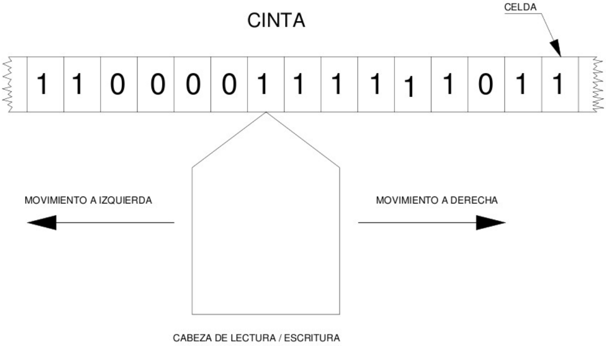






6. Máquinas de Turing

- Una máquina de Turing es un modelo matemático abstracto que formaliza el concepto de algoritmo.
- Fue introducido por Alan Turing en 1936.
- Consta de un cabezal lector/escritor y una cinta infinita en la que el cabezal lee el contenido, borra el contenido anterior y escribe un nuevo valor.



ver Máquina de Turing en Youtube

6. Máquinas de Turing

- Una máquina de turing se define como una séptupla $M = (Q, V, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ donde:
  - Q es un conjunto finito de estados.
  - Γ es el conjunto de símbolos permitidos en la cinta.
  - $B \in \Gamma$ es el símbolo blanco.
  - $V \in \Gamma$ es el alfabeto de entrada (sin incluir el blanco).
  - $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ es la función de transición.
  - q_0 es el estado inicial.
  - $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

6. Máquinas de Turing

Considere una máquina de turing que verifica si el número de ceros de una palabra es par: $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_0\})$ donde la función δ viene dada por:

$$\delta(q_0, 0) = \{q_1, B, R\} \qquad \delta(q_0, 1) = \{q_0, B, R\}$$
$$\delta(q_1, 0) = \{q_0, B, R\} \qquad \delta(q_1, 1) = \{q_1, B, R\}$$

Para la entrada 00010 el proceso es el siguiente:

Inicio:

0	0	0	1	0	···
q_0					

Paso 1:

B	0	0	1	0	···
	q_1				

Paso 2:

B	B	0	1	0	···
		q_0			

Paso 3:

B	B	B	1	0	···
			q_1		

Paso 4:

B	B	B	B	0	···
				q_1	

Paso 5:

B	B	B	B	B	···
					q_0

Ejercicio: diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$

6. Máquinas de Turing

Solución:

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$

Función de transición:

δ	0	1	X	Y	B
q_0	q_1, X, R	-	-	q_3, Y, R	-
q_1	$q_1, 0, R$	q_2, Y, L	-	q_1, Y, R	-
q_2	$q_2, 0, L$	-	q_0, X, R	q_2, Y, L	-
q_3	-	-	-	q_3, Y, R	q_4, B, R
q_4	S	S	S	S	S