INF 3144 - Investigación de Operaciones

Set Covering Problem

Rodrigo Olivares
Mg. en Ingeniería Informática
rodrigo.olivares@uv.cl

26 de mayo de 2017

Set Covering Problem

Problema

Definición del problema

El problema de conjunto de cobertura o Set Covering Problem consiste en encontrar el **número mínimo de variables** (conjunto de variables) que permitan satisfacer un conjunto determinado de restricciones. Existen variadas aplicaciones para este tipo de problema, siendo las principales la localización de servicio, balanceo de líneas de producción, selección de ciertas características, entre otras.

Set Covering Problem

Problema

Una de las definiciones formales que se puede encontrar acerca del *SCP* es la siguiente:

Sea:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) \text{ de una matriz binaria } \{0,1\} \text{ de dimensiones } m \times n. \\ C &= (c_j) \text{ un vector de costo de números enteros.} \\ I &= \{1, ..., m\} \\ J &= \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

Set Covering Problem

Problema

Definición del problema

→ Decimos que una columna j cubre una fila i, si $a_{ij} = 1$.

→ Cada columna j está asociada con un costo real no-negativo c_j.

→ El SCP requiere un subconjunto de mínimo costo $S \subseteq J$, de tal mandera que cada fila $i \in I$ está cubierta por **al menos una** columna $j \in S$.

Set Covering Problem

Problema

El modelo matemático queda:

$$min(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \ \forall i \in I \tag{2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J \tag{3}$$

Set Covering Problem

Problema

Objetivo

El objetivo es reducir al mínimo la suma de los costos de las columnas seleccionadas, donde $x_j = 1$ si la columna j está en la solución, 0 en caso contrario. Las restricciones aseguran que cada fila i está cubierta por al menos una columna.

Set Covering Problem

Aplicación

Aplicación

La región de Valparaíso, Chile, está dividida en 7 provincias, en las cuales pueden ser instalados ciertos servicios, como por ejemplo cuarteles de bomberos, hospitales, antenas de comunicaciones, entre otros. Cada provincia puede ofrecer su servicio a su(s) provincia(s) adyacente(s). El problema radica en determinar dónde ubicar los servicios, de tal manera de minimzar los costos (instalación del servicio), pero asegurando que se cubran todas las provincias.

Set Covering Problem

Aplicación

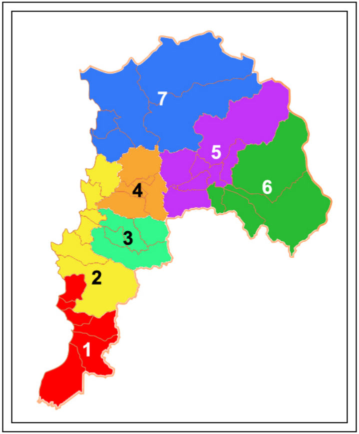

Figura 1: Provincias de la región de Valparaíso, Chile y los posibles lugares de instalación de servicios.

Set Covering Problem

Aplicación

Vector de costos

Tenemos un vector de costos $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$, $N = 1, ..., 7$ y $M = 1, ..., 7$. A partir de la figura 1, podemos diseñar la matriz de cobertura A. De esta forma, un $a_{ij} = 1$ indica que la columna j cubre la fila i. Por ejemplo, la columna $j = 2$, cubre las filas $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, $i = 4$ e $i = 7$, mientras que la columna $j = 5$, cubre las filas $i = 4$, $i = 5$, $i = 6$ e $i = 7$.

Set Covering Problem

Aplicación

El siguiente paso es encontrar un vector binario $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, de tal manera que cumpla con lo siguiente:

$$min\ z = \sum_{j=1}^{7} c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{7} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad \forall i \in I$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si se instala el servicio en la provincia } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases} \qquad \forall j \in J$$

Set Covering Problem

Aplicación

$$A = \begin{pmatrix} 1100000 \\ 1111001 \\ 0111000 \\ 0111101 \\ 0001111 \\ 0000110 \\ 0101101 \end{pmatrix}$$

La solución de este problema nos indicará dónde debemos ubicar los servicios de tal forma que cubran todas las provincias, a un costo mínimo.

$$\vec{X} = \{x_2, x_5\} \Leftrightarrow \vec{X} = \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0\}$$

Set Covering Problem

Aplicación

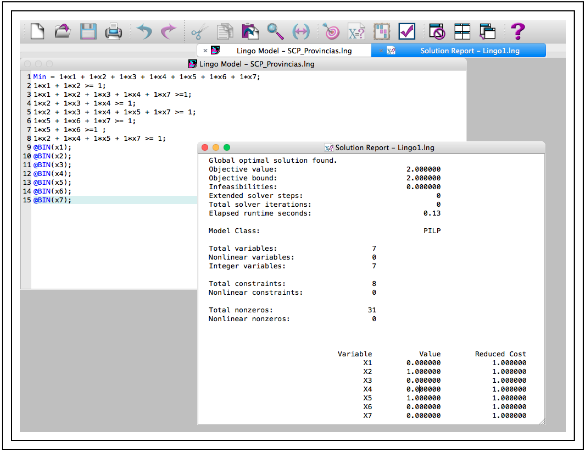

Figura 2: Solución SCP (Lingo).

Set Covering Problem

Ejercicios

Problema:

Se desea construir el menor número de estaciones de bomberos que cubra un territorio de 6 ciudades: $Ciudad_1$, $Ciudad_2$, $Ciudad_3$, $Ciudad_4$, $Ciudad_5$, y $Ciudad_6$. Las estaciones se podrían construir en cualquiera de las ciudades pero garantizando siempre que todas las ciudades dispongan al menos de una estación a una de distancia máxima de 15 minutos. La Tabla 1 muestra los tiempos en minutos para ir de una ciudad a otra y la Tabla 2 muestra el costo asociado a construir una estación.

Set Covering Problem

Ejercicios

Tabla 1: Tiempo entre ciudades

	$ciudad_1$	$ciudad_2$	$ciudad_3$	$ciudad_4$	$ciudad_5$	$ciudad_6$
$ciudad_1$	0	10	20	30	20	20
$ciudad_2$	10	0	25	35	30	10
$ciudad_3$	20	25	0	15	30	20
$ciudad_4$	30	35	15	0	15	25
$ciudad_5$	20	30	30	15	0	14
$ciudad_6$	20	10	20	25	14	0

Tabla 2: Costos de construir

$ciudad_1$	$ciudad_2$	$ciudad_3$	$ciudad_4$	$ciudad_5$	$ciudad_6$
M$65	M$55	M$60	M$45	M$40	M$50

Set Covering Problem

Ejercicios

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si se construye la estación en la ciudad } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\texttt{minimizar } z = 65x_1 + 55x_2 + 60x_3 + 45x_4 + 40x_5 + 50x_6$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$$

Preguntas

Preguntas ?